Teoría Geométrica de Control óptimo

Un problema de control consiste en hallar los controles, u^a, y los estados x^i, que hacen que se verifique la ecuación de control:

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x(t), u(t)), \quad i=1,\dots,n.$$

con unas condiciones en los extremos:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

Si además pedimos que se minimice un cierto funcional: funcional objetivo o de coste

$$\min \longrightarrow S(x,u) = \int_0^T L(x(t), u(t))\, dt$$

Diremos que tenemos un problema de control óptimo.

Axioma I El espacio de estados o de configuración de un sistema de control, Q, es una variedad diferenciable de dimensión finita con o sin borde, y los controles constituyen las fibras de un fibrado sobre ella.

$$\Pi: C \longrightarrow Q$$

Las coordenadas locales las denotamos:

$x^i \in Q$, $i=1,\dots,n$, $(x^i, u^a) \in C$, $a=1,\dots,m$

No todos los sistemas de control se pueden describir así, pero resulta útil esta descripción para una mejor comprensión geométrica del problema. (p.e. variedades dif. a trozos → zigzags)
Los controles representan fuerzas externas aplicadas dependiendo del estado, la noción geométrica de fibrado tiene sentido, puede ser un fibrado vectorial o afín: $\Pi: C \longrightarrow Q$, Q espacio base.

Las variables de control son las coordenadas locales a lo largo de las fibras $\pi^{-1}(x)$ de x, las denotamos como $\{u^a\}$, $a=1,\dots,m$. La fibra $C_x=\pi^{-1}(x)$ constituye el conjunto de controles que actúan en el punto $x\in Q$.

La dinámica del sistema viene descrita por ecuaciones diferenciables de primer o segundo orden, estas ecuaciones dependen de los controles como parámetros. La idea de la formulación geométrica es de E. Martínez, basada en el cálculo diferencial a lo largo de aplicaciones.

<u>Axioma 2</u> La ecuación dinámica de un sistema de control, llamada ec. de estado o de control, está descrita por un campo vectorial en el fibrado de los estados y controles a lo largo de la proyección π, es decir, el campo vectorial es una aplicación $\Gamma: C\longrightarrow TQ$, t.q. $\tau_Q\circ\Gamma=\pi$ y que en coordenadas tiene la expresión

$$\Gamma = f^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$$\begin{tikzcd} & TQ \arrow[d, "\tau_Q"] \\ C \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r, "\pi"'] & Q \end{tikzcd}$$

<u>Axioma 3</u> El funcional objetivo o de coste, S, está definido mediante una densidad lagrangiana $L: C\longrightarrow \mathbb{R}$, y es diferenciable en un cierto espacio de curvas admisibles en C, $S=\int_0^T L(x,u)\,dt$.

- L podría depender de t.
- El espacio de curvas es un subconjunto de

$\Omega(0,T;x_0,\Sigma)=\{\gamma:[0,T]\longrightarrow C \mid \gamma(0)=x_0,\ \gamma(T)\in\Sigma\}$

$\Sigma=\{x_T\}$ ó $\Sigma=Q$.

$\boxed{\text{PCO}}$ problema de control óptimo

$$
\begin{tikzcd}
 & TQ \arrow[d, "\tau_Q"] \\
C = Q \times U \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r, "\Pi"] & Q \\
I \arrow[u, "(\gamma, u)"] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}
$$

- $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ intervalo cerrado, fijo.
- Q: variedad diferenciable de dimensión n, con coord. loc. $\{x^i\}$.
- $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto de $\mathbb{R}^n$
- Fibrado trivial $\Pi : Q \times U = C \longrightarrow Q$, $\dim(C) = n+m$)
  con coord. locales $\{x^i, u^a\}$ en $Q \times U$.
- Γ c.v. a lo largo de la proyección $\Pi : C \to Q$, esto es, $\Gamma : C \longrightarrow TQ$ y $\tau_Q \circ \Gamma = \Pi$, donde τ_Q es la proyección natural. En coord. loc. $\Gamma = f^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i}$,
  donde f^i son funciones definidas en un abierto de C.
  Γ es continuo en $Q \times U$ y diferenciable respecto a Q en $Q \times U$.
- $(\gamma, u) : I \longrightarrow C = Q \times U$ una curva,
  $u : I \to U$ medible y acotado y
  $\gamma : I \to Q$ absolutamente continua $\to$ son curvas integrables generalizadas del c.v. $X^{\{u\}}$ a.e.
- $L : C \to \mathbb{R}$ es la densidad lagrangiana, diferenciable respecto a Q en C y continua en C.
  $S[\gamma, u] = \int_0^T L(\gamma, u)\, dt$, funcional objetivo, definido en curvas (γ, u).

<u>Enunciado del PCO</u> Dado $Q, U, \Gamma, L, I, x_0, x_T \in Q$ hallar (γ^*, u^*) t. q.

1) $\gamma^*(0) = x_0$, $\gamma^*(T) = x_T$
2) $\dot{\gamma}^*(t) = \Gamma(\gamma^*(t), u^*(t))$, $t \in I$
3) $S(\gamma^*, u^*)$ es mínimo sobre todas las curvas (γ, u) que satisfacen (1) y (2)

→ Localmente el enunciado del PCO equivale a que (γ^*, u^*) satisface:

$$\begin{cases} \dot{x}^i = f^i(x,u) \\ \gamma(0) = x_0 \,,\ \gamma(T) = x_T \\ \min \to S(\gamma, u) \end{cases}$$

· <u>Nota</u> las curvas consideradas $\gamma: I \to Q$ son funciones absolutamente continuas, por tanto sólo satisfacen la condición (2) en los puntos donde γ es derivable, es decir, almost everywhere.
Este hecho lo suponemos todo el rato, que las curvas integrales de los c.v. son curvas integrales en este sentido generalizado, a.e.

$\boxed{\widehat{pco}}$ problema de control óptimo extendido

La idea ahora es añadir una variable nueva, x^0, de forma que $\dot{x}^0 = L$ y exigir $\min(x^0(T)) \Rightarrow$ $x^0(T) = S$, así nos olvidamos del funcional en la descripción.

coord. natural en $\mathbb{R}$

Consideramos $\hat{Q} = \mathbb{R} \times Q$ con coord. loc. $\{\vec{x}^0, x^i\}$ $\dim(\hat{Q}) = n+1$

y el fibrado trivial $\hat{\pi} : \hat{Q} \times U = \hat{C} \longrightarrow \hat{Q}$.

Sea $\hat{\Gamma}$ el c.v. a lo largo de la proyección

$\hat{\pi} : \hat{C} = \hat{Q} \times \underline{\underline{U}} \longrightarrow \hat{Q}$, $\quad \hat{\Gamma}(x^0, x, u) = L(x,u)\frac{\partial}{\partial x^0} + \Gamma(x,u)$

$(\hat{\gamma}, u) = ((x^0 \circ \hat{\gamma}, \gamma), u) : I \longrightarrow \hat{C} = \hat{Q} \times U$

$$
\begin{tikzcd}
 & T\hat{Q} \arrow[d, "\tau_{\hat{Q}}"] \\
\hat{C} = \hat{Q} \times U \arrow[ur, "\hat{\Gamma}"] \arrow[r, "\hat{\pi}"] & \hat{Q} \arrow[d, "\pi_2"] \\
I \arrow[u, "(\hat{\gamma}, u)"] \arrow[ur, "\hat{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & Q
\end{tikzcd}
$$

Enunciado del pco extendido, $\widehat{pco}$

Dado el pco anterior y $\hat{Q}$, $\hat{\Gamma}$ arriba definidos, hallar $(\hat{\gamma}^*, u^*)$ t.q.

1) $\hat{\gamma}^*(0) = (0, x_0)$, $\quad \gamma^*(T) = x_T$
2) $\dot{\hat{\gamma}}^*(t) = \hat{\Gamma}(\hat{\gamma}^*(t), u^*(t))$, $\quad t \in I$
3) $\hat{\gamma}^{*0}(T)$ es mínimo sobre todas las curvas $(\hat{\gamma}, u)$ satisfaciendo 1) y 2).

<u>Nota</u> El $\widehat{pco}$ tiene las mismas propiedades que el pco, es decir, son <u>equivalentes</u>:

- $\min \hat{\gamma}^{*0}(T) = \min(x^0(T)) = \min \int_0^T L(\gamma, u)\,dt = \min S[\gamma, u]$ (def. en curvas $(\hat{\gamma}, u)$).
- Localmente la curva $(\hat{\gamma}^*, u^*)$ satisface las ecs dif: $\dot{x}^0 = L(x,u)$, $\dot{x}^i = f^i(x,u)$ y las cond. $\hat{\gamma}(0) = (0, x_0)$, $\gamma(T) = x_T$

[PH] Problema hamiltoniano. Formalismo presimpléctico del problema de control óptimo.

Dado el PCO

Construimos el espacio de fases de control:

$$M = \hat{\pi}^*(T^*\hat{Q}) = \pi^*_{\hat{Q}}(\hat{C})$$

Como el pull-back del fibrado $\hat{C}$ a lo largo de $\pi_{\hat{Q}}$, proyección natural del fibrado cotangente $\pi_{\hat{Q}} : T^*\hat{Q} \longrightarrow \hat{Q}$ o equivalentemente como el pull-back del fibrado cotangente a $\hat{Q}$, (espacio de coestados $T^*\hat{Q}$) a lo largo de $\hat{\pi}$.

M está formada por el conjunto de puntos (z, α) que verifican $z \in \hat{C}$, $\alpha \in T^*\hat{Q}$, $\hat{\pi}(z) = \pi_{\hat{Q}}(\alpha)$, es decir, M es la suma de Whitney de la variedad $\hat{C}$ y la variedad cotangente de $\hat{Q}$: $M = C \oplus T^*\hat{Q}$

$\dim(M) = 2n+m+2$, las coordenadas canónicas de M son $(x^0, x^i, p_0, p_i, u^a)$, hay dos proyecciones naturales:

$pr_1 : M \longrightarrow \hat{C}$, $pr_1(x^0, x^i, p_0, p_i, u) = (x^0, x^i, u)$

$pr_2 : M \longrightarrow T^*\hat{Q}$, $pr_2(x^0, x^i, p_0, p_i, u) = (x^0, x^i, p_0, p_i)$

La relación entre todas estas aplicaciones se recoge en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & M = \hat{C} \oplus T^*\hat{Q} \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
\hat{C} = \hat{Q} \times U \arrow[dr, "\hat{\pi}"'] & & T^*\hat{Q} \arrow[dl, "\pi_{\hat{Q}}"] \\
 & \hat{Q} &
\end{tikzcd}$$

M está equipado de forma natural con una 1-forma canónica, la 1-forma de Liouville Θ, que en coordenadas locales $(x^0, x^i, p_0, p_i, u^a)$, tiene la expresión:

$$\Theta = p_0 dx^0 + p_i dx^i$$

y de manera intrínseca está definida por:

$$\Theta(\mathfrak{z}, \alpha_x)(v) = \langle \alpha_x, (\hat{\pi} \circ pr_1)_*(v) \rangle =$$
$$= \langle \alpha_x, (\pi_{\hat{Q}} \circ pr_2)_*(v) \rangle, \ \forall v \in T_{(\mathfrak{z}, \alpha_x)} M$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el pairing natural entre $T^*\hat{Q}$ y $T\hat{Q}$.

Asociada a esta 1-forma, tenemos la 2-forma canónica presimpléctica Ω en M:

$$\Omega = -d\Theta$$

en coord. loc: $\Omega = dx^0 \wedge dp_0 + dx^i \wedge dp_i$

esta estructura Ω, coincide con la estructura presimpléctica en M definida mediante el pull-back a lo largo de pr_2 de ω, donde ω es la estructura natural de $T^*\hat{Q}$, en coord. loc. $\omega = dx^0 \wedge dp_0 + dx^i \wedge dp_i$,

$$\Omega = pr_2^* \omega$$

en coord. locales Ω y ω tienen la misma expresión, Ω tiene rango cte $= 2n+2$.

Esta 2-forma Ω es cerrada y degenerada. Su distribución característica, $\ker \Omega$, está generada por los "campos vectoriales de control"

$$K = \ker \Omega = \mathcal{L}in \left\{ \frac{\partial}{\partial u^a}, \ a = 1, \dots, m \right\}$$

En el espacio de fases M, podemos definir la función hamiltoniana:

$$\underline{H(\hat{x}, \hat{p}, u)} = \langle \Theta_{\langle \hat{x}, \hat{p}, u \rangle}, \hat{\Gamma}(\hat{x}, u) \rangle =$$
$$= p_0 L(x,u) + p_i f^i(x,u)$$

Entonces (M, Ω, H) define un sistema hamiltoniano presimpléctico cuya dinámica viene dada por todos los campos vectoriales Γ_c en M, que satisfacen la ecuación dinámica:

$$\boxed{i_{\Gamma_c} \Omega = dH}$$

Si $\Gamma_c = \dot{x}^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{p}_0 \frac{\partial}{\partial p_0} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} + C^a \frac{\partial}{\partial u^a}$

$i_{\Gamma_c} \Omega = dH \Rightarrow$

$\dot{x}^0 dp_0 + \dot{x}^i dp_i - \dot{p}_0 dx^0 - \dot{p}_i dx^i =$

$= \frac{\partial H}{\partial x^0} + dx^0 + \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_0} dp_0 + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial u^a} du^a$

obtenemos que las curvas integrales de Γ_c verifican las ecuaciones

Las curvas del PCO verifican estas ecuaciones: PCO $\Rightarrow$ ecs ham.

$$\circledast \left| \begin{array}{l} \dot{x}^0 = \frac{\partial H}{\partial p_0} = L(x,u) \\ \dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f^i(x,u) \\ \dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x^0} = 0 \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -p_0 \frac{\partial L}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \\ \frac{\partial H}{\partial u^a} = p_j \frac{\partial f^j}{\partial u^a} + p_0 \frac{\partial L}{\partial u^a} = 0 \end{array} \right.$$

en la literatura: $\underline{\text{sistema adjunto}}$ (para las ecuaciones de $\dot{p}_0$ y $\dot{p}_i$)

Veremos que estas ecuaciones son las que verifican las curvas del PMP.
Las sols de estas ecs se llaman curvas óptimales críticas.

Enunciado del PH de control óptimo

Dado el pco y el $\widehat{pco}$, hallar
hallar $(\hat{\sigma}^*, u^*)$ t.q.

1) $\hat{\gamma}^*(0) = (0, x_0)$, $\gamma^*(T) = x_T$, donde $\hat{\gamma}^* = \pi_{\hat{Q}} \circ \hat{\sigma}^*$
$\gamma^* = \pi_2 \circ \hat{\gamma}^*$

2) $(\dot{\hat{\sigma}}^*(t), \dot{u}^*(t)) = \Gamma_C(\hat{\sigma}^*(t), u^*(t))$, $t \in I$

$$
\begin{tikzcd}
TM & \\
M = T^*\hat{Q} \times U \arrow[u, "\Gamma_C"] \arrow[r] & T^*\hat{Q} \arrow[d, "\pi_{\hat{Q}}"] \\
I \arrow[u, "(\hat{\sigma}, u)"] \arrow[ur, "\hat{\sigma}"] \arrow[r, "\hat{\gamma}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \hat{Q} \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & Q
\end{tikzcd}
$$

Localmente la curva $(\hat{\sigma}^*, u^*)$ satisface las ecuaciones (*) del sistema hamiltoniano presimpléctico en (M, Ω, H).

Enunciado del PMP

Teorema Principio de Máximo de Pontryagin

Sea $(\hat{\gamma}^*, u^*): I \to \hat{C} = \hat{Q} \times U$ una solución del $\widehat{PCO}$, entonces existe $(\hat{\sigma}^*, u^*): I \to M = T^*\hat{Q} \times U$ t.q.

1) $(\hat{\sigma}^*, u^*)$ es solución del PH, es decir

$\hat{\gamma}^*(0) = (0, x_0)$, $\gamma^*(T) = x_T$ / $\gamma^* = \pi_2 \circ \hat{\gamma}^*$

$(\dot{\hat{\sigma}}^*(t), \dot{u}^*(t)) = \Gamma_C(\hat{\sigma}^*(t), u(t))$, $t \in I$

2) $\hat{\gamma}^* = \pi_{\hat{Q}} \circ \hat{\sigma}^*$

Si $\hat{\sigma}^* = (\hat{\gamma}^*, \hat{\alpha}^*)$, con $\hat{\alpha}^*(t) = (\alpha_0^*(t), \alpha^*(t)) \in T^*_{\hat{\gamma}^*(t)}\hat{Q}$, se satisface también:

a) $H(\hat{\sigma}^*(t), u^*(t)) = \max_{u(t) \in U} H(\hat{\sigma}^*(t), u(t))$ a.e.

b) $H(\hat{\sigma}^*(t), u^*(t)) = cte$ a.e.

c) $\hat{\alpha}^*(t) \neq 0$, $\hat{\alpha}^*(t) \in T^*_{\hat{\gamma}^*(t)}\hat{Q}$ $\forall t \in [0, T]$

d) $\alpha_0^*(t) = cte$, $\alpha_0^*(t) \leq 0$

→ De las ecs hamiltonianas $\dot{p}_0 = 0 \Rightarrow p_0 = cte \Rightarrow$ primer resul. de d)

→ c) $\hat{\alpha}^* = (\alpha_0^*, \alpha^*) \neq 0 \Rightarrow$ o $\alpha_0^*(t) \neq 0$ o $\alpha^*(t) \neq 0$

localmente → existe una coordenada de $\hat{\alpha}^*(t)$ no nula → $(p_i \circ \hat{\alpha}^*)(t) = \alpha_i^*(t) \neq 0$

→ El PMP sólo garantiza que dada una solución del problema de control óptimo, esta es solución del problema hamiltoniano, pero nada más.
NO son equivalentes los dos problemas.
El PMP sólo da condiciones necesarias

Implicaciones del PMP

En (M, Ω, H) teníamos definido un sistema hamiltoniano presimpléctico, cuya dinámica venía dada por todos los c.v. Γ_c en M que satisfacen la ec. dinámica:

$$i_{\Gamma_c}\Omega = dH,$$

como Ω es degenerada, $\ker\Omega = \{\frac{\partial}{\partial u^a}, a=1,\dots,m\}$, existen soluciones de Γ_c a la ec. dinámica $\Leftrightarrow$ $i_Z(dH)=0$, $\forall Z\in\ker\Omega = K$.

Con la base $Z_a = \{\frac{\partial}{\partial u^a}\}$ de $\ker(\Omega)$, esta condición se convierte en:

$$\phi_a^{(1)} = \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0 \Rightarrow$$ por tanto sólo habrá soluciones a la ec. dinámica en el subconjunto de M definido por:

$$\underline{\underline{M_1}} = \{(\hat{x}, \hat{p}, u)\in M \mid \phi_a^{(1)} = \frac{\partial H}{\partial u^a} = p_i\frac{\partial f^i}{\partial u^a} + p_0\frac{\partial L}{\partial u^a} = 0\}.$$

[NOTA: Suponemos que M_1 es una variedad diferenciable. Si no lo fuera, podríamos perturbar ligeramente el problema de partida de la forma: $\dot{x} = f_\epsilon(x,u) = f(x,u) + \epsilon\, \beta(u) B u$, donde B es una matriz de rango máximo. No modificamos el func. objetivo, y M_1 sería así regular.]

→ En M_1 hay sol. de la ec. dinámica, pero no sabemos si los c.v. Γ_c son paralelos a esta subvariedad, es decir, que cualquier trayectoria que parta de M_1 permanecerá todo el tiempo en M_1.

La condición necesaria es que el campo deje invariante a la subvariedad, es decir:

$$\underline{\Gamma_c(\phi_a^{(1)}) = 0} \quad \text{en } M_1 \Leftrightarrow$$

$$0 = \Gamma_c(\phi_a^{(1)}) = \dots\dots + \frac{\partial^2 H}{\partial u^a \partial u^b} C^b = 0$$

Si $W_{ab} = \frac{\partial^2 H}{\partial u^a\partial u^b}$ es invertible, se puede despejar $C^b (= \dot{u}^b)$ y el c.v. queda determinado y diremos que el problema de control óptimo es regular.

Si no, será un problema de control óptimo singular, y nos queda una segunda ligadura y procedemos recursivamente con un algoritmo de ligaduras:

Caso singular

W_{ab} no es inversible $\to$ no podemos despejar C.
Dado $\xi \in M_1$, ξ singular, denotamos como M_2 al subconjunto de M_1 construido de forma que para cada uno de sus puntos existe al menos un vector C t.q. $\Gamma(\phi_a^{(1)})(\xi)=0$, $a=1,\dots,m$.
Si este subconjunto es una subvariedad diferenciable de M_1, podrá definirse localmente por nuevas ligaduras

$\phi^{(2)} \Leftarrow \Gamma(\phi_a^{(1)})=0 \to$ de este análisis obtenemos $\phi^{(2)}$

Si denotamos por P_2 a la restricción de la proyección pr_2 a M_2, se cumple que $\ker P_{2*} = \ker \Omega|_{M_2}$ y P_{2*} será inyectiva si la matriz que multiplica a C^b es invertible.
Si no lo es $\mapsto$ obtenemos una familia de subvariedades definidas recurrentemente:

$$M_K = \{(x,p,u) \in M_{K-1} \mid \exists\, C \text{ t.q. } \Gamma_C(\phi^{(K-1)})=0\}$$

Si $\exists\, r: M_r = M_{r+2} = \cdots \to \underline{M_r = M_\infty}$ Variedad final de las ligaduras:

En M_∞ $\to$ feedback óptimal $\to u^a = \varphi(x,p)$
$\to$ no feedback óptimal $\to$ algunos controles quedan indeterminados.

Ejemplos sencillos

① Regular

$$\dot{x} = x + u$$
$$L = \frac{1}{2}x^2 + xu + \frac{1}{2}R^2 , \qquad R>0$$
$$H = p(x+u) - \frac{1}{2}x^2 - xu - \frac{1}{2}Ru^2$$
$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial u} = p - x - R u \rightarrow u = R^{-1}(p-x)$$

---

② Singular con feedback

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1 + x_1 + u_1 \\ \dot{p}_2 &= -p_2 + x_2 + u_2 \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1u_1 + x_2u_2 + \frac{1}{2}u_1^2 \rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = p_1(x_1+u_1) + p_2(x_2+u_2) - x_1u_1 - x_2u_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}u_1^2$$

$$H_{u_1} = p_1 - x_1 - u_1 \rightarrow u_1 = p_1 - x_1$$

$$H_{u_2} = p_2 - x_2 = \phi^{(2)}$$

$$\Gamma(\phi^{(2)}) = \dot{p}_2 - \dot{x}_2 = -p_2 + x_2 + u_2 - x_2 - u_2 = -p_2$$

$$\Rightarrow p_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$\Gamma(p_2) = \dot{p}_2 = -p_2 + x_2 + u_2 = u_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + p_1 - x_1 = p_1$$
$$\dot{p}_1 = -p_1 + x_1 + u_1 = 0 \rightarrow p_1 = cte$$

(3) Singular sin feedback

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1$$
$$\dot{x}_2 = x_2$$
$$L = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + x_1u_1 + x_2u_2 + \tfrac{1}{2}u_1^2 \qquad R = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$H = p_1(x_1+u_1) + p_2x_2 - \tfrac{1}{2}x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_2^2 - x_1u_1 - x_2u_2 - \tfrac{1}{2}u_1^2$$

$$\Gamma_c = (x_1+u_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-p_1 + x_1 + u_1)\frac{\partial}{\partial p_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + (-p_2 + x_2 + u_2)\frac{\partial}{\partial p_2} + c_1\frac{\partial}{\partial u_1} + c_2\frac{\partial}{\partial u_2}$$

$$H_{u_1} = p_1 - x_1 - u_1 \rightarrow u_1 = p_1 - x_1$$
$$H_{u_2} = -x_2 = 0 \rightarrow \phi^{(1)} = -x_2$$
$$\Gamma(\phi^{(1)}) = \dot{x}_2 = x_2 = 0$$
$$\rightarrow \dot{p}_2 = -p_2 + u_2 .$$

u_2 no queda determinado.

Problemas LQ

$x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$L = \tfrac{1}{2}x^TQx + x^TNu + \tfrac{1}{2}u^TRu$$
$$H(x,p,u) = p^TAx + p^TBu - \tfrac{1}{2}x^TQx - x^TNu - \tfrac{1}{2}u^TRu$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = \frac{\partial H}{\partial p^T}$$
$$\dot{p} = -A^Tp + Qx + Nu = -\frac{\partial H}{\partial x^T}$$
$$\dot{u} = c$$

$$\phi^{(1)} = -N^Tx + B^Tp - Ru$$

Mide la singularidad.

↳ Algoritmo de ligaduras.

<u>problema en grupos</u>

Dado G grupo de Lie con $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, usando las identificaciones $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}$ y $T(T^*G) \cong (G \times \mathfrak{g}^*) \times (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ inducidos por el difeomorfismo $S: T^*G \to G \times \mathfrak{g}^*$ dado por $S(g,p) := (g, p \circ r_g'(e)^{-1})$, donde r_g denota la traslación invariante a dchas por $g \in G$.

Si $H(g,p) : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$, entonces el c.v. hamiltoniano es de la forma:

$$\Gamma : G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow (G \times \mathfrak{g}^*) \times (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$$

viene dado por

$$\Gamma(g,p) = \left(g, p; \frac{\partial H}{\partial p}(g,p), -\frac{\partial H}{\partial g}(g,p) - p \circ \mathrm{ad}\left(\frac{\partial H}{\partial p}(g,p)\right)\right)$$

Trasladamos esto al prob. de control.

<u>Teorema</u> Sea G un grupo de Lie con algebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $(E_1, \ldots, E_n)$ una base del e.v. $\mathfrak{g}$.
Si consideramos el sma dinámico invariante a dchas

$\underline{\dot{g}(t) = U(t)\, g(t)}$ que evoluciona en G, donde

$$U(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) E_i + \sum_{i=m+1}^{n} \overset{cte}{u_i} E_i$$

y queremos que el sma evolucione desde $g(0) = g_0$ a $g(T) = g_T$, t. q. $\min \int_0^T L(g,u)\, dt$.

→ Se define el hamiltoniano: $H: \mathbb{R} G \times \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$H(x_0, g, p_0, p, u) = p_0 L(g,u) + \sum_{i=1}^{n} u_i\, p(E_i)$$

Si $(u_1^*(t), \ldots, u_m^*(t))$ es un control óptimo
$t \longrightarrow g^*(t)$ la trayectoria resultante en G
entonces hay una curva $t \to p^*(t), p_0(t)$ en $\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ t. q.

$$\dot{g}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(g^*(t), p^*(t)) = U^*(t)\, g^*(t) \qquad \dot{x}_0 = L / \dot{p}_0 = 0$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial g}(g^*(t), p^*(t)) - p^*(t) \circ \mathrm{ad}(U^*(t))$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(g^*(t), p^*(t), u_1^*(t), u_m^*(t), u_{m+1}, \ldots, u_n) = 0 \qquad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

reescribiendo la última ecuación, obtenemos:

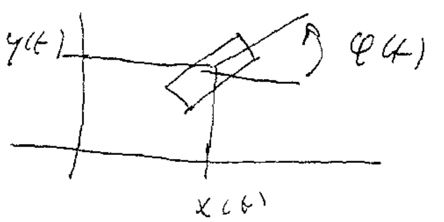
$$\dot{g}^*(t) = U^*(t)\, g^*(t)$$

$$\dot{p}^*(t) = -p_0 \frac{\partial H}{\partial g}(g^*(t), u^*(t)) - p^*(t) \circ ad(U^*(t))$$

$$p^*(t) E_i = -p_0 \frac{\partial L}{\partial u_i}(g^*(t), u^*(t)) \qquad 1 \le i \le m$$

<u>un ejemplo concreto</u>

Aparcamiento de un coche



(x,y) pos. del centro de masas

vel. lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = u(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \operatorname{sen}\varphi(t) \end{pmatrix}$$

$\dot{\varphi} = \omega(t) \to$ veloc. angular del coche.

$\to$ <u>$G = SE(2,\mathbb{R})$</u> podemos reescribir el problema como un problema en G, el grupo de movimientos en el plano, que representamos:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} D & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \mid D \in SO(2,\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$\mathfrak{g}$ viene generada por $E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$[E_0, E_1] = -E_2$, $[E_0, E_2] = E_1$, $[E_1, E_2] = 0$.

asociada a cada trayectoria $t \to (x(t), y(t), \varphi(t))$ tenemos la trayectoria $t \to g(t)$ en G def. por

$$g(t) = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) & \sin\varphi(t) & 0 \\ -\sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ x(t) & y(t) & 1 \end{bmatrix} \qquad \dot{g} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\, \omega & \cos\varphi\, \omega & 0 \\ -\cos\varphi\, \omega & -\sin\varphi\, \omega & 0 \\ u\cos\varphi & u\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\dot{g} = \ldots \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cancel{x} & y & 1 \end{bmatrix} = (\omega E_0 + u E_1)\, g$$

controles $t \to u(t)$, $t \to \omega(t)$

$$L(g,u) = (\alpha u(t)^2 + \beta \omega(t)^2)$$

→ En este ejemplo no hay soluciones anormales

$\Rightarrow p_0 = -\frac{1}{2}$

La última ec. $\Rightarrow$

$$p(t)E_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial w}(g(t), p(t)) = \beta w(t)$$

$$p(t)E_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial u} = \alpha u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\beta w(t)) = \dot{p}(E_0) = -p([wE_0 + uE_1, E_0]) =$$

$$= -p(uE_2) = -u\,p(E_2)$$

$$\underline{\frac{d}{dt}(\alpha u(t))} = \dot{p}(E_1) = -p([wE_0 + uE_1, E_1]) =$$

$$= +p(wE_2) = \underline{w\,p(E_1)} = \underline{-\alpha w u}$$

$$\underline{\left(\frac{d}{dt}\right)} p(t)E_2 = -p([wE_0 + uE_1, E_2]) =$$

$$= -p(wE_1) = -w\,p(E_1) = \underline{-w\alpha u(t)}$$

$\underline{z(t) = p(t)E_2}$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\beta w) = -uz, \quad \frac{d}{dt}(\alpha u) = wz}, \quad \frac{d}{dt}z = -\alpha w u$$

$$\Downarrow$$

$$w(\beta\dot{w}) + u(\alpha\dot{u}) = 0 \Rightarrow \alpha u^2 + \beta w^2 = cte$$

$$\rightarrow \left(\frac{u(t)}{\sqrt{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{w}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = E^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = \sqrt{\beta}\,E\cos\phi(t) \\ w(t) = \sqrt{\alpha}\,E\sin\Phi(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow S = \int_0^T \alpha\beta E^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\,dt = \underline{\alpha\beta E^2}\,T$$

→ hay que hallar Φ →

$$\alpha\beta\left(\frac{d}{dt}\right)(w+u) = (\beta w - \alpha u)z$$

$$\alpha\beta\left(\frac{d}{dt}\right)(\cancel{\phi} w+u)= \alpha\beta\left(\frac{d}{dt}\right)(\sqrt{\alpha}E\sin\phi+\sqrt{\beta}E\cos\phi)=$$

$$= E\alpha\beta\dot\phi(\sqrt{\alpha}\cos\phi-\sqrt{\beta}\sin\phi)$$

$$= (\beta w-\alpha u)\, z = zE(\beta\sqrt{\alpha}\sin\phi-\alpha\sqrt{\beta}\cos\phi)$$

$$=-z\cdot E\sqrt{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}\cos\phi-\sqrt{\beta}\sin\phi)$$

$$\Rightarrow z(t)=-\sqrt{\alpha\beta}\;\dot\Phi(t)\Rightarrow \dot z=-\sqrt{\alpha\beta}\frac{d}{dt}(\dot\Phi)$$

$$\Rightarrow \dot z=-\alpha\sqrt{\alpha\beta}\,E^2\sin\Phi\cos\Phi$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}(\dot\Phi)=\alpha E^2\sin\Phi\cos\Phi$$

ec. que se puede integrar en términos de funciones elípticas

finalmente se obtiene

$$\Gamma(x)=\begin{bmatrix}\cos c(x) & \sin c(x) & 0\\ -\sin c(x) & \cos c(x) & 0\\ a(x) & b(x) & 1\end{bmatrix}$$

$$c(x)=\sqrt{\alpha}E\int_0^x \cos F(z)\,dz$$

$$a(x)=-\sqrt{\beta}E\int_0^x \sin F(z)\cos c(z)\,dz$$

$$b(x)=-\sqrt{\beta}E\int_0^x \sin F(z)\sin c(z)\,dz$$

Donde $F(z)=\eta(\pm\sqrt{\alpha}Ez/k)+c;k)$

η es la inversa de la función de amplitud de Jacobi.

$$\Gamma'=A\Gamma \Rightarrow g(t)=\Gamma(Q(t))\,\Gamma(Q(t_0))^{-1}g_0$$

;